ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ СПО
«ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

Практическое пособие
по изучению раздела

Теория пределов

Составила: Миргородская Ирина Николаевна,
преподаватель математики

ст. Ленинградская
2006 г.

Пособие составлено в соответствии с государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальностям среднего профессионального образования.

Данное пособие ставит своей целью оказание помощи студентам, обучающимся по специальностям 080110 «Экономика и бухгалтерский учет» (по отраслям), в организации их самостоятельной работы по овладению системой знаний, умений и навыков в объеме действующей программы.

В данном пособии представлено краткое содержание основного теоретического материала, подробное решение примеров и упражнения для самостоятельной работы. Итоговая контрольная работа позволит закрепить полученные знания по данной теме.

Пособие может быть использовано преподавателями математики при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

Понятие предела последовательности.

В курсе математического анализа понятие предела является одним из основных. С помощью предела вводятся производная и определенный интеграл. Предварительно ознакомимся с понятием числовой последовательности.

Пусть каждому натуральному числу **n** поставлено в соответствие число $a_n = f(n)$, т.е. пусть задана функция натурального аргумента. Тогда говорят, что задана ***числовая последовательность*** $\{a_n\}$. Обычно числовую последовательность задают формулой

$$a_n = f(n).$$

Так, например:

1) формула $a_n = 2n - 1$ числам натурального ряда

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

ставит в соответствие последовательность нечетных чисел

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots.$$

2) формула $a_n = 1 - 2n$ задает числовую последовательность

$$-1, -3, -5, -7, \ldots,$$

которая является бесконечно убывающей арифметической прогрессией;

3) формула $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ задает возрастающую последовательность правильных дробей

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \ldots;$$

4) формула $a_n = \dfrac{4n-1}{3n-1}$ задает убывающую последовательность неправильных дробей

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{11}{8}, \frac{15}{11}, \frac{19}{14}, \ldots$$

Во всех приведенных примерах заданные последовательности являются бесконечными: для каждой из них не существует последнего члена.

Определение. Число ***a*** называется пределом последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε (эпсилон) найдется такое положительное число N, что абсолютная величина разности $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Это кратко записывается так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

Предел функции.

Пусть дана функция: *y = f(x)*.

Определение. Число ***A*** называется пределом функции *f(x)* при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - \boldsymbol{A}| < \varepsilon$ при $0 < |x - \boldsymbol{a}| < \delta$.

Это записывают так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Теоремы о пределах

(правила предельного перехода)

1. Предел суммы или разности равен сумме или разности пределов.

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y$$

2. Предел произведения равен произведению пределов.

$$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$$

3. Предел отношения равен отношению пределов.

$$\lim(x / y) = \lim x / \lim y, \quad \lim y \neq 0.$$

Свойства пределов.

1. Предел постоянной равен этой постоянной.

$\lim A = A$, если A = const.

2. Постоянную можно вынести за знак предела.

$\lim(c \cdot y) = c \cdot \lim y$, если c = const.

3. Если существуют конечные пределы $\lim_{x \to a} f(x)$ и $\lim_{x \to a} g(x)$, то

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

4. Если существует $\lim_{x \to a} g(x)$ и *f(x)* – элементарная функция, то

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Например:

$$\lim_{x \to a} \sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} g(x)},$$

$$\lim_{x \to a} \log_c g(x) = \log_c \lim_{x \to a} g(x).$$

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины.

Если предел функции равен нулю ($\ell im y = 0$), то она называется бесконечно малой величиной.

Если предел функции равен бесконечности ($\ell im y = \infty$), т.е. величине, обратной к бесконечно малой величине, то она называется бесконечно большой величиной.

Следовательно, выполняются равенства

$$\ell im \frac{1}{0} = \infty, \ \ell im \frac{1}{\infty} = 0.$$

Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5x+2}{2x+3}$.

Δ Так как $x \to 4$, то числитель дроби стремится к числу

$5 \cdot 4 + 2 = 22$, а знаменатель – к числу $2 \cdot 4 + 3 = 11$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 4} \frac{5x+2}{2x+3} = \frac{22}{11} = 2.$$

2. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1} = \dfrac{3-3}{9+3+1} = \dfrac{0}{13} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - x^2 + 1) = -1 - 1 + 1 = -1$

4. $\lim\limits_{x\to 0} (3x^3 + x^2 - 8x + 10) = 0 + 0 - 0 + 10 = 10$

Но при простой подстановке может получиться неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Эти случаи рассмотрим далее.

<u>Задания для самостоятельной работы.</u>

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$

3. $\lim\limits_{x\to 0,1} \dfrac{5x+4}{1-x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x+5}{x^2+6}$

5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$ 6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3}{2x-6}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3}$ 8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2-5x-1}{2x^2-x-1}$

Раскрытие неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо предварительно сократить дробь (разложив на множители), а затем найти предел.

Например:

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Δ Здесь числитель и знаменатель дроби при x → 3 стремятся к нулю(неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$). Имеем

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = 2 .$$

2. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20} = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-2}{x-4} = \dfrac{3}{1} = 3$,

где необходимо было решить квадратные уравнения для разложения квадратного трехчлена на множители в числителе и в знаменателе дроби по формуле $ax^2+bx+c = (x-x_1)(x-x_2)$.

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{1+3x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+1}{3} = \frac{2}{3},$$

здесь, для того чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, и числитель и знаменатель были умножены на выражение, сопряженное знаменателю, а затем знаменатель был свернут по формуле разности квадратов.

<u>Задания для самостоятельной работы.</u>

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{x^3-27}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$

8. $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}}\dfrac{x^4-25}{x^2-5}$

9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$

12. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$

15. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$

16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2}$

Раскрытие неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо числитель и знаменатель разделить на $\boldsymbol{x}$ с наибольшим показателем степени.

Например:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - x^2 + 2}{x^3 - x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^4}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}} = \dfrac{1}{0} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^4}{x^5 + x^6} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{x^3}{x^6} + \dfrac{x^4}{x^6}}{\dfrac{x^5}{x^6} + \dfrac{x^6}{x^6}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x} + 1} = \dfrac{0}{1} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^2 - x - 6}{3x - x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}}{\dfrac{3}{x} - 1} = \dfrac{10}{-1} = -10$

<u>Задания для самостоятельной работы.</u>

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 6}{3x^3 + x^2 - 26}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 5}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + 3x + 7}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 4x + 8}{5x^3 + 27x^2 + x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^4 - 8x^2 + 3}{5x^4 + 3x^3 + 5}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 + 4x^2 - 1}{8x^2 - 6x + 3}$

Иногда при подстановке в функцию предельного значения аргумента получаются выражения, не имеющие конкретного смысла:

$$\infty - \infty,\quad \mathbf{1}^{\infty},\quad \mathbf{0} \cdot \infty,\quad \mathbf{0}^{\mathbf{0}},$$

их называют «неопределенностями». В этих случаях для нахождения пределов необходимо предварительно выполнить некоторые преобразования данного выражения.

Рассмотрим некоторые приемы, которыми пользуются при таких преобразованиях.

Например: Имеется неопределенность вида $[\,\infty - \infty\,]$:

1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+6x}-x)\left(\sqrt{x^2+6x}+x\right)}{(\sqrt{x^2+6x}+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{6}{x}\right)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{x\sqrt{1+\frac{6}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{x\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1\right)}=\frac{6}{1+1}=3$$

2.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1\cdot(x+1)-2}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел.

Предел отношения ***sin*** бесконечно малой величины к самой этой величины к самой этой величине равен 1.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{tgx}{x}=1$$

Например:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}=5\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot1=5$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{cos3x}=$
$= 3\cdot 1\cdot 1 = 3$

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}}=\frac{3}{5}$

Свойства:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$

Второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad\qquad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Например:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3 = e^3$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^x = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{5x}\right)^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} (1+4x)^{\frac{3}{5x}} = \left(\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right)^{\frac{3\cdot 4}{5}} = e^{\frac{12}{5}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

<u>Задания для самостоятельной работы.</u>

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 7x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{tg 3x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{5}{3x}\right)^{2x}$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+2x\right)^{\frac{5}{x}}$ 8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x}$

Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 функции f (x) и φ (x) дифференцируемы и φ′ (x) ≠ 0. Если $\lim\limits_{x\to x_0}$ f (x) = $\lim\limits_{x\to x_0}$ φ (x) = 0 или $\lim\limits_{x\to x_0}$ f (x) = $\lim\limits_{x\to x_0}$ φ (x) = ∞, т.е. частное f (x) ⁄ φ (x) в точке x = x_0 представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$\lim\limits_{x\to x_0}$ f (x)⁄φ (x) = $\lim\limits_{x\to x_0}$ f ′(x)⁄φ′ (x), если предел в правой части этого равенства существует.

Если частное f ′(x)⁄φ′ (x) в точке x = x_0 также есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и производные f ′(x) и φ′ (x) удовлетворяют соответствующим условиям, то следует перейти к отношению вторых производных и.т.д.

В случае неопределенности вида 0·∞ или ∞ - ∞ следует алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести её к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и далее воспользоваться правилом Лопиталя.

В случае неопределенности вида 0^0 или ∞^0 или 1^∞ следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.

Например.

1. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

Числитель и знаменатель стремится к нулю при x → 1, а потому имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя, т.е. рассмотрим предел отношения производных заданных функций:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$

В данном случае имеет место неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}=0$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\ln x\right)$

Здесь мы имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Представим произведение функций в виде частного, а затем, получив неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=0$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

Это неопределенность вида ∞ - ∞. Для того чтобы найти предел функции, приведем дроби к общему знаменателю, а затем, получив неопределенность вида $\frac{0}{0}$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x\left(2+x\right)}=\frac{1}{2}$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)^x$

Это – неопределенность вида 0^0. Обозначим данную функцию через ***y***, т.е. $y = (\sin x)^x$, и прологарифмируем её:

$$\ln y = x\ln\sin x=\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}.$$

Вычислим предел логарифма данной функции, применяя правило Лопиталя (здесь имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$) :

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=-\lim_{x\to 0}\left(x\cos x\frac{x}{\sin x}\right)$$

$= 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} y=e^0=1$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{2\cos x}$

Это – неопределенность вида ∞^0. Положим $(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = y$ и прологарифмируем: $\ln y = 2\cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x=\dfrac{2\ln tgx}{\frac{1}{\cos x}}$.

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln tgx}{\sec x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sec^2 x}{tgx}}{\sec xtgx} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{tg^2 x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec xtgx}{2tgx\sec^2 x} =$$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

Это – неопределенность вида 1^∞. Логарифмируя и применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0}\left(\ln x \ln(1+x)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x\ln^2 x}{x+1}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{1+\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

Контрольная работа

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x+1}{x^2-x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2+x-4}{5x-x^2-4}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^2+2x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-1}{x^5-1}$

5. $\lim\limits_{x\to -2} \left(x^3+3x^2\right)$

6. $\lim\limits_{x\to 2} \left(3x^2-2x\right)$

7. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-2x}{x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{7x-5}{10+2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x^2-2x+4}{(x-1)(x+1)}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2-\sqrt{x}}$

11. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3+x}{x^3-1}$

12. $\lim\limits_{x\to 3} \left(x^2-7x+4\right)$

13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$

15. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

16. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}$

17. $\lim\limits_{x\to 3} \left(5x^2-6x+7\right)$

18. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

19. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$

20. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4-16}{x+2}$

21. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \dfrac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$

22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$

23. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3-3x^2+5x+7}{3x^3+4x^2-x+2}$

24. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-5x+8}{2x^3-x+1}$

25. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3+x-1}{2x^3+5x^2}$

26. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x-2}$

27. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

28. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x+1}{x^2-2}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-x+5}{3x^3+7x+1}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+8x-1}{x^5+7x^3+11}$

32. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3tgx}{x}$

34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,2x}{x}$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 17x}{8x}$

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$

38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

39. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

40. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3+x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

41. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}$

42. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x}$

43. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{3x}$

44. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{5x}\right)^{x}$

45. $\lim\limits_{x\to 0{,}1} \dfrac{5x+4}{1-x}$

46. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x+5}{x^2+6}$

47. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3+5x-2}$

48. $\lim\limits_{x\to 64} \left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}+5\right)$

49. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-\sqrt{x+9}}{x}$

51. $\lim\limits_{x\to 1{,}5} \dfrac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}$

52. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$

53. $\lim\limits_{x\to -0{,}5} \dfrac{2x^2-7x-4}{-2x^2+5x+3}$

54. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

55. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{16-x^2}{x^3-64}$

56. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$

57. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$

58. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$

59. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$

60. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$

61. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$

62. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

63. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$

64. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$

65. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

66. $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}$

67. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-4x+3}{x+5}$

68. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$

69. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2+7x-1}{3x^2-5x+6}$

70. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4+2x^3-1}{100x^3+2x^2}$

71. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x}$

72. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

73. $\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$

74. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

75. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$

76. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$

77. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$

78. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 10\pi x}{tg\, 5x}$

79. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right)$

80. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$

81. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$

82. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{x^3-27}$

83. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$

84. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$

85. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)$

86. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)$

87. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)$

88. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{2x-3}\right)$

89. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x-1}-x\right)$

90. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+7x}\right)$

91. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2}{x+3}$

92. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

93. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-5x+2}$

94. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+5x)^7-(1+7x)^5}{x^2}\right)$

95. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{10}-1}{x^3-1}$

96. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}$

97. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}$

98. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

99. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

100. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$

101. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

102. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

103. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$

104. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+1}{2x+1}$

105. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$

106. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

107. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{tgx}{\sin 2x}$

108. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

109. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$

110. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

111. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$

112. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}-x}{x-2}$

113. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

114. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

115. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

116. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$

117. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-1}{3x^2-4x}$

118. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

119. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x+6}{x^3+8}$

120. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

121. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

122. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$

123. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

124. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

125. $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

126. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$

127. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2+3x-1}{x+5}$

128. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5+x}{2-x}$

129. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+7}{8-x}$

130. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x-2}{x+3}$

131. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{x-4}$

132. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-2x}{2+x}$

133. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+1}{x-3}$

134. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x+3}$

135. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x+8}$

136. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x-5}$

137. $\lim\limits_{\alpha\to -1} \dfrac{5+2\alpha^2-\alpha}{\alpha^2+3\alpha-2}$

138. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-x^2}{x+8}$

139. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \left(2-x^2+x\sqrt{3}\right)$

140. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-10x+21}{x^2+1}$

141. $\lim\limits_{x\to -2} \left(4+\dfrac{x}{2}\right)$

142. $\lim\limits_{a\to 4} \dfrac{4-a}{a+1}$

143. $\lim\limits_{a\to 3} \dfrac{a^2+3a-3}{6-a}$

144. $\lim\limits_{a\to -3} \dfrac{a+3}{a-3}$

145. $\lim\limits_{a\to 4} \dfrac{a^2-16}{a+5}$

146. $\lim\limits_{a\to \sqrt{5}} \dfrac{a^2-5}{a+1}$

147. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x-x^2}{2x^2+5x+4}$

148. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+3x+x^2}{x+2}$

149. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x+x^2}{9-x}$

150. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+4x-12}$

151. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2^x+3x+1\right)$

152. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{tg\,2x}{x}$

153. $\lim\limits_{a\to 2} \dfrac{a^2-a-2}{a+7}$

154. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x}{x}$

155. $\lim\limits_{a\to 0,5} \dfrac{1+2a}{2a-1}$

156. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-4x}{x^2-16}$

157. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{\sin 2x}$

158. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

159. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

160. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

161. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-4}{x^2-3x+2}$

162. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{8-x^3}{x-2}$

163. $\lim\limits_{a\to 4} \dfrac{a^3-64}{a^2-16}$

164. $\lim\limits_{a\to 2} \dfrac{2+a-a^2}{4-a^2}$

165. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{27-x^3}{x^2-9}$

166. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

167. $\lim\limits_{a\to 3} \dfrac{a^3-5a^2+6a}{a^2-3a}$

168. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{4-\sqrt{2x}}{x-8}$

169. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}{x-1}$

170. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-2\sqrt{x-2}}{9-x^2}$

171. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{9-x}$

172. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}$

173. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+x^2+x^3}{x^4+x^3-x^2}$

174. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+3x-5}{2x+17}$

175. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+12x-4}{x^3+6x}$

176. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^5+3}{x^4+10x^3+100x^2}$

177. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-x+14}{3x^2-3x+1}$

178. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-x^2+5x^3}{3x+x^3-12}$

179. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4-x^3+7x+1}{2-x+x^3}$

180. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+x^2+2x^3}{x^3-2x^2+4x-1}$

181. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^2+7x-1}{2x^2-x+5}$

182. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3-x}{x^2+4x}$

183. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x-x^2-x^3}{x^4-x^2+11x+7}$

184. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-x}{x^2+4x}$

185. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2x}$

186. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

187. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

188. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\text{в}x}$

189. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

190. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

191. $\lim\limits_{y\to -2} \dfrac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$

192. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-64}{x-4}$

193. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$

194. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{x}$

195. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{x}$

196. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

197. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-4x+5}{x^3+4}$

198. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}{x^2}$

Используемая литература:

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. М., 2000.496 с.
2. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Сборник дидактических заданий по математике. М., 2005.236 с.
3. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика. М., 1991.480 с.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М., 1997.352 с.
5. Рогов А.Т. Задачник по высшей математике для техникумов. М., 1973.250 с.
6. Подольский В.А., Суходский А.М. Сборник задач по математике. М., 1999.496 с.
7. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа. М., 1978.336с.
8. Пехлецкий И.Д. Математика. М., 2003.300 с.
9. Гусак А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Минск, 2003.416 с.
10. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М., 2003.304 с.

Для заметок.