Производная суммы и разности

Пусть даны функции *f*(*x*) и *g*(*x*), производные которых нам известны. К примеру, можно взять элементарные функции, которые рассмотрены выше. Тогда можно найти производную суммы и разности этих функций:

1. (*f* + *g*)’ = *f* ’ + *g* ’
2. (*f* − *g*)’ = *f* ’ − *g* ’

Итак, производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных. Слагаемых может быть больше. Например, (*f* + *g* + *h*)’ = *f* ’ + *g* ’ + *h* ’.

Строго говоря, в алгебре не существует понятия «вычитание». Есть понятие «отрицательный элемент». Поэтому разность *f* − *g* можно переписать как сумму *f* + (−1) · *g*, и тогда останется лишь одна формула — производная суммы.

Задача. Найти производные функций: *f*(*x*) = *x* 2 + sin x; *g*(*x*) = *x* 4 + 2*x* 2 − 3.

Функция *f*(*x*) — это сумма двух элементарных функций, поэтому:

*f* ’(*x*) = (*x* 2 + sin *x*)’ = (*x* 2)’ + (sin *x*)’ = 2*x* + cos x;

Аналогично рассуждаем для функции *g*(*x*). Только там уже три слагаемых (с точки зрения алгебры):

*g* ’(*x*) = (*x* 4 + 2*x* 2 − 3)’ = (*x* 4 + 2*x* 2 + (−3))’ = (*x* 4)’ + (2*x* 2)’ + (−3)’ = 4*x* 3 + 4*x* + 0 = 4*x* · (*x* 2 + 1).

Ответ:  
*f* ’(*x*) = 2*x* + cos x;  
*g* ’(*x*) = 4*x* · (*x* 2 + 1).

Производная произведения

Математика — наука логичная, поэтому многие считают, что если производная суммы равна сумме производных, то производная произведения *strike*">равна произведению производных. А вот фиг вам! Производная произведения считается совсем по другой формуле. А именно:

(*f* · *g*) ’ = *f* ’ · *g* + *f* · *g* ’

Формула несложная, но ее часто забывают. И не только школьники, но и студенты. Результат — неправильно решенные задачи.

Задача. Найти производные функций: *f*(*x*) = *x* 3 · cos x; *g*(*x*) = (*x* 2 + 7*x* − 7) · *e* *x*.

Функция *f*(*x*) представляет собой произведение двух элементарных функций, поэтому все просто:

*f* ’(*x*) = (*x* 3 · cos *x*)’ = (*x* 3)’ · cos *x* + *x* 3 · (cos *x*)’ = 3*x* 2 · cos *x* + *x* 3 · (− sin *x*) = *x* 2 · (3cos *x* − *x* · sin *x*)

У функции *g*(*x*) первый множитель чуть посложней, но общая схема от этого не меняется. Очевидно, первый множитель функции *g*(*x*) представляет собой многочлен, и его производная — это производная суммы. Имеем:

*g* ’(*x*) = ((*x* 2 + 7*x* − 7) · *e* *x*)’ = (*x* 2 + 7*x* − 7)’ · *e* *x*+ (*x* 2 + 7*x* − 7) · (*e* *x*)’ = (2*x* + 7) · *e* *x*+ (*x* 2 + 7*x* − 7) · *e* *x*= *e* *x*· (2*x* + 7 + *x* 2 + 7*x* −7) = (*x* 2 + 9*x*) · *e* *x*= *x*(*x* + 9) · *e* *x*.

Ответ:  
*f* ’(*x*) = *x* 2 · (3cos *x* − *x* · sin *x*);  
*g* ’(*x*) = *x*(*x* + 9) · *e* *x*.

Обратите внимание, что на последнем шаге производная раскладывается на множители. Формально этого делать не нужно, однако большинство производных вычисляются не сами по себе, а чтобы исследовать функцию. А значит, дальше производная будет приравниваться к нулю, будут выясняться ее знаки и так далее. Для такого дела лучше иметь выражение, разложенное на множители.

Производная частного

Если есть две функции *f*(*x*) и *g*(*x*), причем *g*(*x*) ≠ 0 на интересующем нас множестве, можно определить новую функцию *h*(*x*) = *f*(*x*)/*g*(*x*). Для такой функции тоже можно найти производную:

Производная частного

Неслабо, да? Откуда взялся минус? Почему *g* 2? А вот так! Это одна из самых сложных формул — без бутылки не разберешься. Поэтому лучше изучать ее на конкретных примерах.

Задача. Найти производные функций:

Дробно-рациональные функции

В числителе и знаменателе каждой дроби стоят элементарные функции, поэтому все, что нам нужно — это формула производной частного:

Производная дробно-рациональной функции f  
Производная дробно-рациональной функции g

По традиции, разложим числитель на множители — это значительно упростит ответ:

Вынесение множителей за скобку

Ответ:

Производные частного

Производная сложной функции

Сложная функция — это не обязательно формула длиной в полкилометра. Например, достаточно взять функцию *f*(*x*) = sin *x* и заменить переменную *x*, скажем, на *x* 2 + ln *x*. Получится *f*(*x*) = sin (*x* 2 + ln *x*) — это и есть сложная функция. У нее тоже есть производная, однако найти ее по правилам, рассмотренным выше, не получится.

Как быть? В таких случаях помогает замена переменной и формула производной сложной функции:

*f* ’(*x*) = *f* ’(*t*) · *t* ’, если *x* заменяется на *t*(*x*).

Как правило, с пониманием этой формулы дело обстоит еще более печально, чем с производной частного. Поэтому ее тоже лучше объяснить на конкретных примерах, с подробным описанием каждого шага.

Задача. Найти производные функций: *f*(*x*) = *e* 2*x*+ 3; *g*(*x*) = sin (*x* 2 + ln *x*)

Заметим, что если в функции *f*(*x*) вместо выражения 2*x* + 3 будет просто *x*, то получится элементарная функция *f*(*x*) = *e* *x*. Поэтому делаем замену: пусть 2*x* + 3 = *t*, *f*(*x*) = *f*(*t*) = *e* *t*. Ищем производную сложной функции по формуле:

*f* ’(*x*) = *f* ’(*t*) · *t* ’ = (*e* *t*)’ · *t* ’ = *e* *t*· *t* ’

А теперь — внимание! Выполняем обратную замену: *t* = 2*x* + 3. Получим:

*f* ’(*x*) = *e* *t*· *t* ’ = *e* 2*x*+ 3 · (2*x* + 3)’ = *e* 2*x*+ 3 · 2 = 2 · *e* 2*x*+ 3

Теперь разберемся с функцией *g*(*x*). Очевидно, надо заменить *x* 2 + ln *x* = *t*. Имеем:

*g* ’(*x*) = *g* ’(*t*) · *t* ’ = (sin *t*)’ · *t* ’ = cos *t* · *t* ’

Обратная замена: *t* = *x* 2 + ln *x*. Тогда:

*g* ’(*x*) = cos (*x* 2 + ln *x*) · (*x* 2 + ln *x*)’ = cos (*x* 2 + ln *x*) · (2*x* + 1/*x*).

Вот и все! Как видно из последнего выражения, вся задача свелась к вычислению производной суммы.

Ответ:  
*f* ’(*x*) = 2 · *e* 2*x*+ 3;  
*g* ’(*x*) = (2*x* + 1/*x*) · cos (*x* 2 + ln *x*).

Очень часто на своих уроках вместо термина «производная» я использую слово «штрих». Например, штрих от суммы равен сумме штрихов. Так понятнее? Ну, вот и хорошо.

Таким образом, вычисление производной сводится к избавлению от этих самых штрихов по правилам, рассмотренным выше. В качестве последнего примера вернемся к производной степени с рациональным показателем:

(*x* *n*)’ = *n* · *x* *n*− 1

Немногие знают, что в роли *n* вполне может выступать дробное число. Например, корень — это *x* 0,5. А что, если под корнем будет стоять что-нибудь навороченное? Снова получится сложная функция — такие конструкции любят давать на контрольных работах и экзаменах.

Задача. Найти производную функции:

Производная сложной функции

Для начала перепишем корень в виде степени с рациональным показателем:

*f*(*x*) = (*x* 2 + 8*x* − 7)0,5.

Теперь делаем замену: пусть *x* 2 + 8*x* − 7 = *t*. Находим производную по формуле:

*f* ’(*x*) = *f* ’(*t*) · *t* ’ = (*t* 0,5)’ · *t* ’ = 0,5 · *t* −0,5 · *t* ’.

Делаем обратную замену: *t* = *x* 2 + 8*x* − 7. Имеем:

*f* ’(*x*) = 0,5 · (*x* 2 + 8*x* − 7)−0,5 · (*x* 2 + 8*x* − 7)’ = 0,5 · (2*x* + 8) · (*x* 2 + 8*x* − 7)−0,5.

Наконец, возвращаемся к корням:

Производная степени с рациональным показателем

Ответ:

Дробно-рациональная функция с корнем