Лекция №6
ТЕМА: РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

План лекции:

1 Опыты Рейнольдса

Английский физик О. Рейнольдс в 1883г. на очень простых опытах показал, а затем теоретически обосновал существование в природе двух принципиально различных режимов движения жидкости.

Принципиальная схема экспериментальной установки, на которой ученый исследовал режимы движения жидкости, представлена на рисунке 6.1.

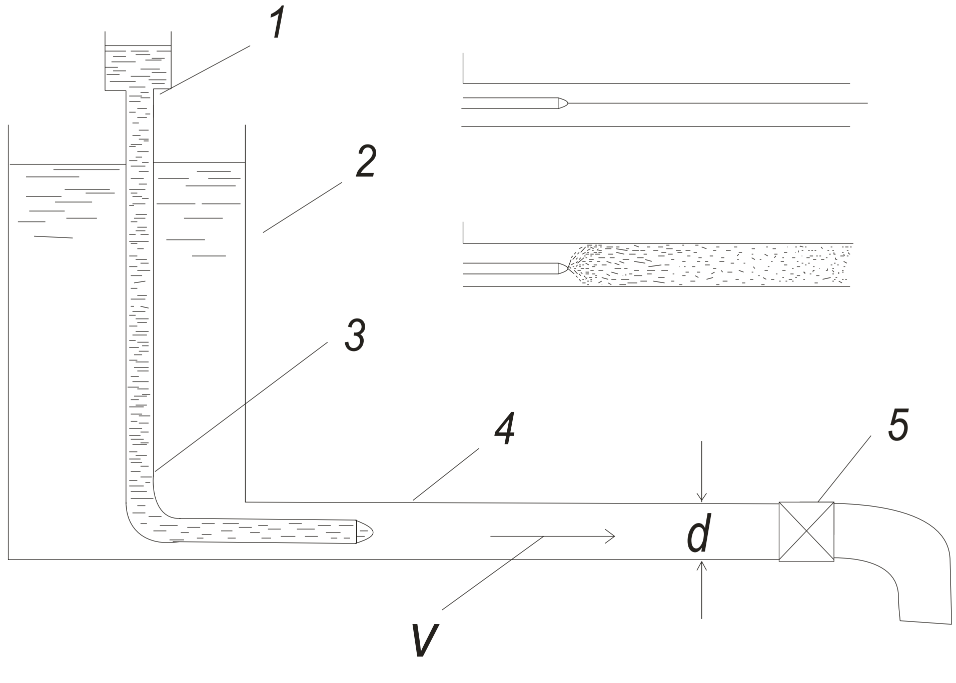

Рисунок 6.1 - Экспериментальная установка для определение режимов движения жидкости

1; 3 – подвод красителя в поток исследуемой жидкости; 2 – напорный бак; 4 – прозрачный трубопровод; 5- запорная арматура.

Слоистое движение жидкости без поперечного перемешивания ее частиц Рейнольдс назвал ламинарным, от латинского слова *lamina,* что означает слой. Движение жидкости с поперечным перемешиванием частиц по ходу ее движения ученый назвал турбулентным, от латинского слова *turbulentus*, что означает бурный, хаотичный.

Рейнольдс установил, что критерием режима движения жидкости является безразмерная величина, представляющая собой отношение произведения характерной скорости потока на характерный линейный размер к кинематическому коэффициенту вязкости жидкости. Этот критерий впоследствии был назван числом Рейнольдса *Re.*

Для напорного движения жидкости в круглых цилиндрических трубах число *Re* определяется по формуле

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot d}{\nu} \qquad (6.1)$$

Для напорных потоков в трубах некруглого поперечного сечения критерий *Re* определяется из выражения с использованием понятия эквивалентного диаметра $d_{экв}$

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot d_{экв}}{\nu} = \frac{V \cdot 4R}{\nu} \qquad (6.2)$$

Для безнапорных потоков число *Re* принято определять по формуле

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot R}{\nu} \qquad (6.3)$$

Число Рейнольдса, соответствующее переходу от ламинарного режима к турбулентному, называется критическим $Re_{кр}$.

Экспериментально установлено, что для напорных потоков $Re_{кр}=2320$, хотя в некоторых особенных случаях оно может достигать *5000* единиц. Для практических расчетов принято считать $Re_{кр}=2320$. Для безнапорных потоков жидкости в практических расчетах принято за критическое число Рейнольдса брать величину $Re_{кр}=580$, если *Re* рассчитывается по формуле (6.3).

Следует отметить, что критические числа Рейнольдса для напорных и безнапорных потоков отличаются друг от друга в четыре раза, точно так же, как эквивалентный диаметр отличается от гидравлического радиуса. Это говорит о том, что безнапорные потоки можно рассчитывать по тем же зависимостям, что и напорные, если использовать понятие эквивалентного диаметра, а не гидравлического радиуса.

Режим движения оказывает существенное влияние на потери энергии (напора) при движении реальной вязкой жидкости. Поэтому, прежде чем подсчитывать потери напора, необходимо определить режим движения жидкости, то есть число *Re.*

2 Потери напора по длине и в местных сопротивлениях. Принцип сложения потеть напора

При движении потока реальной вязкой жидкости капельной или газообразной часть удельной энергии (напора) затрачивается на преодоление различных гидравлических сопротивлений. Количественное определение этих потерь является важнейшей задачей гидродинамики, без решения которой невозможно применение основного уравнения гидродинамики – уравнения Бернулли.

Гидравлические сопротивления и, соответственно, потери напора подразделяются на два вида:

- потери напора на трение по длине потока, возникающие при движении жидкости по всей длине потока и зависящие от его длины;
- местные потери напора, возникающие при резком изменении направления движения жидкости или резком изменении поперечного сечения ее потока.

Для определения потерь напора на трение по длине одномерного потока в круглых цилиндрических трубах используется формула Дарси-Вейсбаха

$$H_{дл} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} \tag{6.4}$$

где λ –коэффициент гидравлического трения (коэффициент Дарси);

l –длина трубопровода;

d –внутренний диаметр трубопровода.

Формулу (6.4) можно распространить на напорный поток жидкости любого сечения, если ввести понятие эквивалентного диаметра $d_{экв}=4R$, где R – гидравлический радиус.

Коэффициент гидравлического трения λ в общем случае зависит от режима движения жидкости и шероховатости поверхности русла. Для его определения существует множество формул различных авторов, в основном эмпирических, которые будут рассмотрены ниже.

Для определения потерь напора в местных сопротивлениях в гидравлике используется формула Вейсбаха

$$H_{м} = \zeta \cdot \frac{V^2}{2g} \tag{6.5}$$

где ζ – коэффициент местного сопротивления, находится в основном опытным путем или берется из справочной литературы.

Общие потери напора в одномерном потоке жидкости находятся путем арифметического сложения потерь напора по длине на трение в прямолинейных участках потока и во всех местных сопротивлениях, встречающихся по ходу движения жидкости

$$H_{пот} = \sum H_{дл} + \sum H_{м} \tag{6.6}$$

Этот метод определения суммарных потерь напора носит название – принцип наложения потерь напора и работает только тогда, когда местные сопротивления расположены на достаточно большом расстоянии друг от друга и не оказывают взаимного влияния.

3 Ламинарный режим движения жидкости

3.1 Закон распределения скоростей по сечению потока

Рассмотрим ламинарное, установившееся, равномерное движение жидкости в круглой цилиндрической трубе радиусом r_0 (рисунок 6.2)

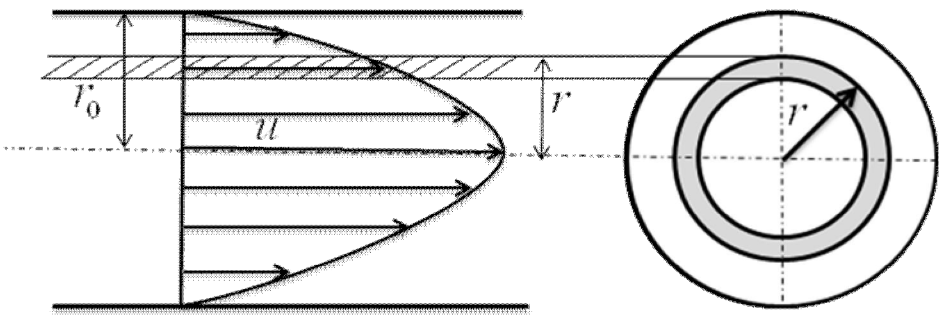

Рисунок 6.2 Поперечное сечение ламинарного потока жидкости в круглой трубе

Выделим в потоке движущейся жидкости цилиндр длиной l и радиусом r. Отбросим мысленно окружающую выделенный цилиндр движущуюся жидкость и заменим ее действие силами, действующими на цилиндр. На боковой поверхности цилиндра вдоль его образующей будут действовать силы трения, определяемые по закону вязкостного трения Ньютона и направленные в сторону противоположную движению жидкости

$$T = -\nu \cdot \rho \cdot 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \frac{du}{dr} \tag{6.7}$$

Знак минус в формуле (6.7) означает, что положительному приращению координаты dr соответствует отрицательное приращение скорости du . Скорость частиц жидкости от центра потока к его твердым стенкам уменьшается.

Движущими силами, действующими на выделенный цилиндр жидкости, являются поверхностные силы давления, равнодействующая которых определяется по формуле

$$\Delta P = \left(p_1 - p_2\right) \cdot \pi r^2 \tag{6.8}$$

где p_1 – давление жидкости, действующее на левое основание цилиндра;

p_2 - давление жидкости, действующее на правое основание цилиндра, отстоящее от левого на расстоянии l.

Спроецируем действующие на выделенный цилиндр жидкости силы на ось ox . При равномерном движении жидкости сумма этих сил должна быть равна нулю, откуда следует, что

$$\Delta P = T \tag{6.9}$$

или

$$-\rho\nu \cdot 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \frac{du}{dr} = \left(p_1 - p_2\right) \cdot \pi r^2 \tag{6.10}$$

Представим разность давлений в основаниях цилиндра $(p_1$ - $p_2)$ через гидравлический уклон i

$$\left(p_1 - p_2\right) = i \cdot \rho g \cdot l \tag{6.11}$$

После несложных математических преобразований и разделения переменных в дифференциальном уравнении (6.10) получим

$$du = -\frac{igr}{2\nu} \cdot dr \tag{6.12}$$

После интегрирования

$$u = -\frac{ig}{4\nu} \cdot r^2 + C \tag{6.13}$$

Для определения константы интегрирования C зададимся начальными условиями:

При $r = r_0; u = 0$ движение частиц жидкости у стенки трубопровода отсутствует из-за наличия вязкостного трения

$$C = \frac{ig}{4\nu} \cdot r_0^{\,2} \tag{6.14}$$

Тогда с учетом выражения (6.14) закон распределения скоростей частиц жидкости по живому сечению потока при ламинарном, установившемся, равномерном движении жидкости будет иметь вид

$$u = \frac{ig}{4\nu} \cdot \left(r_0^{\ 2} - r^{\ 2}\right) \tag{6.15}$$

В центре поперечного сечения потока при *r=0* наблюдается максимальная скорость частиц жидкости

$$u_{мак} = \frac{ig}{4\nu} \cdot r_0^{\ 2} \tag{6.16}$$

Уравнение (6.15) является параболоидом вращения с вершиной на оси трубопровода и позволяет получить эпюру скоростей в поперечном сечении ламинарного потока жидкости (рисунок 6.2)

Выразив силу трения в жидкости T через касательные напряжения τ в уравнении (6.7), с учетом зависимости (6.12), можно получить закон изменения касательных напряжений по сечению ламинарного потока жидкости

$$\tau = \frac{\rho \cdot i \cdot g}{2} \cdot r \tag{6.17}$$

Этот закон носит линейный характер. Эпюра касательных напряжений представлена на рисунке 6.3

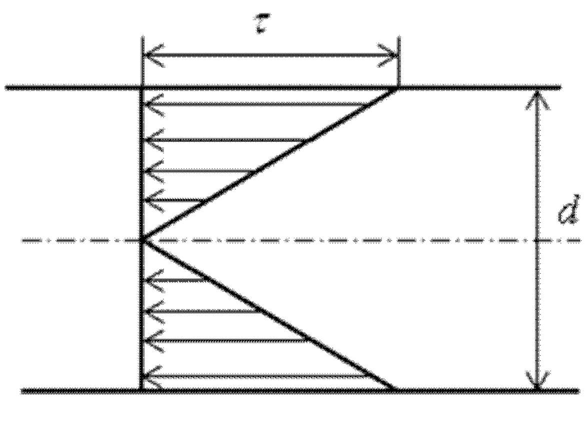

Рисунок 6.3 Эпюра касательных напряжений в симметричном ламинарном потоке

3.2 Расход и средняя скорость ламинарного потока

Выделим в поперечном сечении ламинарного, установившегося, равномерного потока жидкости элементарное живое сечение кольцевой формы радиусом r и шириной dr (рисунок 6.2). Элементарный расход жидкости dQ через это сечение площадью $d\omega$, с учетом закона распределения скоростей по живому сечению (6.15), можно определить из выражения

$$dQ = \frac{ig}{4\nu} \cdot \left(r_0^{\,2} - r^2\right) \cdot d\omega \tag{6.18}$$

Элементарная площадь кольца $d\omega$ может быть представлена как

$$d\omega = 2\pi \cdot r \cdot dr \tag{6.19}$$

С учетом (6.19) выражение (6.18) запишется в виде

$$dQ = \frac{ig}{4\nu} \cdot \left(r_0^{\,2} - r^2\right) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \tag{6.20}$$

Объемный расход всего потока жидкости состоит из элементарных расходов в кольцевых сечениях. Для его определения необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение при изменении координаты r от 0 до r_0

$$Q = \int_0^r dQ = \int_0^r \frac{\pi \cdot i \cdot g}{2\nu} \cdot \left(r_0^{\,2} - r^2\right) \cdot r \cdot dr = \frac{\pi \cdot i \cdot g}{8g} \cdot r_0^{\,4} \tag{6.21}$$

Средняя по живому сечению скорость движения жидкости при ламинарном режиме, с учетом (6.21) определяется из выражения

$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{\pi \cdot r_0^{\,2}} = \frac{i \cdot g \cdot r_0^{\,2}}{8\nu} \tag{6.22}$$

Неравномерность распределения скоростей частиц жидкости по живому сечению учитывает коэффициент поля скоростей k, представляющий собой отношение средней скорости в сечении (6.22) к ее максимальному значению на оси потока (6.16). Для ламинарного режима движения коэффициент поля скоростей составляет

$$k = \frac{V}{u_{мак}} = 0{,}5 \qquad (6.23)$$

Коэффициент Кориолиса α, входящий в уравнение Бернулли для потока вязкой капельной жидкости при ламинарном режиме движения, может быть определен аналитически, так как для этого случая имеется аналитическое выражение зависимости распределения скоростей частиц жидкости по живому сечению потока

$$\alpha = \frac{\int\limits_{\omega} u^3 \cdot d\omega}{V^3 \cdot \omega} = \frac{\int\limits_0^r (\frac{i \cdot g}{4\nu} \cdot \left(r_0^2 - r^2\right))^3 \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr}{\left(\frac{\pi \cdot i \cdot g}{8\nu} \cdot r_0^4\right)^3 \cdot \pi \cdot r_0^2} = 2 \qquad (6.24)$$

Результаты аналитического определения коэффициента Кориолиса для ламинарного режима движения хорошо согласуются с опытными данными.

3.3 Закон гидравлического сопротивления. Коэффициент гидравлического трения (коэффициент Дарси)

Заменим в формуле (6.22) для средней по сечению скорости движения жидкости при ламинарном режиме гидравлический уклон i и радиус трубопровода r_0 из выражений

$$i = \frac{H_{дл}}{l} \qquad (6.25)$$

$$r_0 = \frac{d}{2} \qquad (6.26)$$

Подставим (6.25) и (6.26) в выражение (6.22) и решим его относительно потерь напора на трение по длине $H_{дл}$, получим

$$H_{дл} = \frac{32 \cdot l \cdot \nu \cdot V}{d^2 \cdot g} \qquad (6.27)$$

Выражение (6.27) называется формулой Пуазейля, французского врача девятнадцатого века, который получил эту формулу эмпирическим путем.

Из формулы (6.27) следует, что при ламинарном режиме движения потери напора по длине на трение прямо пропорциональны средней скорости движения жидкости в первой степени. Шероховатость внутренней поверхности стенок русла не оказывает влияния не потери напора.

Умножим числитель и знаменатель формулы Пуазейля на $2V$

$$H_{дл} = \frac{32 \cdot l \cdot \nu \cdot V \cdot 2V}{d^2 \cdot g \cdot 2V} = \frac{64}{\frac{V \cdot d}{\nu}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} = \frac{64}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} \qquad (6.28)$$

Из формулы (6.28) следует, что коэффициент гидравлического трения (коэффициент Дарси) λ для ламинарного движения жидкости зависит только от числа Рейнольдса

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} \qquad (6.29)$$

Выражение (6.29) называется формулой Стокса. Экспериментальные исследования установившегося, равномерного, ламинарного движения жидкости, проведенные различными авторами, показали, что фактическое значение коэффициента гидравлического трения может отличаться от его теоретического значения в зависимости от состояния стенок трубопровода (вмятин, наплывов, нелинейности тела трубы и т.д.).

4 Контрольные вопросы к лекции

1 Какие существуют режимы движения жидкости?
2 Что является критерием для определения режима движения жидкости?
3 Какую скорость называют критической?
4 Чему равно критическое число Рейнольдса для напорных потоков круглого сечения?
5 Чему равно критическое число Рейнольдса для безнапорных потоков?
6 Что такое эквивалентный диаметр?
7 На какие виды подразделяются гидравлические сопротивления?
8 От чего зависят потери напора по длине?
9 По какой формуле определяется потеря напора по длине потока?
10 Чем обусловлены потери напора в местных сопротивлениях?
11 По какому закону происходит распределение скоростей при ламинарном движении жидкости?
12 Чему равен коэффициент Кориолиса при ламинарном движении жидкости?

13 От каких параметров зависит потеря напора по длине при ламинарном движении в формуле Пуазейля?

14 Как называется величина λ в формуле Дарси-Вейсбаха?

15 Как определить величину λ при ламинарном режиме движения жидкости?